



Théorie de la calculabilité et de la complexité

4^{ème} Année Génie informatique

Semestre 4 / Année universitaire 2018/2019

Feuille de TD N° 4

CH4-5 : Grammaires hors-contexte & Automates à pile

Exercice 1

Soit la GHC G dont l'ensemble des règles de production est :

$$E \rightarrow E + T \mid T$$

$$T \rightarrow T * F \mid F$$

$$F \rightarrow (E) \mid a$$

Donner un arbre de dérivation pour chacun des mots suivants :

i. $w_1 = a$

ii. $w_2 = a + a * a$

iii. $w_3 = ((a))$

Exercice 2

Soit la GHC G dont l'ensemble des règles de production est :

$$S \rightarrow XSX \mid R$$

$$R \rightarrow aTb \mid bTa$$

$$T \rightarrow XTX \mid X \mid \varepsilon$$

$$X \rightarrow a \mid b$$

1. Préciser les éléments de G .
2. Donner trois mots de $L(G)$ (dessiner pour chaque mot donné, une dérivation gauche et une dérivation droite).
3. Donner trois mots qui n'appartiennent pas à $L(G)$.
4. Répondre par vrai ou faux (justifier la réponse) :
 - i. $T \Rightarrow aba$
 - ii. $T \Rightarrow aba^*$

- iii. $T \Rightarrow T$
- iv. $T \stackrel{*}{\Rightarrow} T$
- v. $S \stackrel{*}{\Rightarrow} \varepsilon$
- vi. $T \stackrel{*}{\Rightarrow} XX$

Exercice 3

Soit la GHC G dont l'ensemble des règles de production est :

$$S \rightarrow aS \mid aSbS \mid \varepsilon$$

Montrer que G est ambiguë (trouver un mot $w \in L(G)$ pour lequel il y a au moins deux arbres de dérivation distincts, deux dérivations gauches distinctes et deux dérivations droites distinctes).

Exercice 4

Pour chacun des langages suivants, trouver une GHC qui le génère :

1. $L_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \geq 3\}$.
2. $L_2 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w| \text{ impair et } w \text{ ayant le symbole } a \text{ au centre}\}$.
3. $L_3 = \{a^i b^j \mid i, j \geq 0 \text{ et } 2i = 3j\}$.
4. $L_4 = \{a^i b^j \mid i, j \geq 0 \text{ et } i \neq j\}$.

Exercice 5

1. Montrer que la classe des langages hors-contexte est close opérations régulières (union, concaténation et étoile).
2. Montrer que tout langage régulier L est hors-contexte :
 - a. En construisant une GHC à partir d'une expression régulière dénotant L .
 - b. En construisant une GHC à partir d'un AFD acceptant L .
3. Trouver une GHC pour le langage $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ contient } ab\}$.

Exercice 6

En utilisant le lemme de pompage pour langages hors-contexte, montrer que les langages suivants ne sont pas hors-contexte :

1. $L_1 = \{a^i b^i c^j \mid i \leq j \leq 2i; i, j \geq 0\}$.
2. $L_2 = \{a^i b^j c^k \mid k = \max(i, j); i, j, k \geq 0\}$.

Exercice 7

Pour chacun des langages suivants, construire un AP M qui l'accepte, puis donner un calcul d'acceptation pour les mots indiqués sur M :

1. $L_1 = \{a^n b^{2n+1} \mid n \geq 0\}$, $w = a^2 b^5$.

2. $L_2 = \{a^i b^j c^k \mid i = j \text{ ou } i = k\}$, $w_1 = a^2 b c^2$ et $w_2 = a b c^2$.

3. $L_3 = \{a^i b^j \mid 2i \neq 3j\}$, $w = a^2 b^3$.

4. $L_4 = \{w \in \{a, b\}^* \mid 2|w|_a \neq 3|w|_b\}$, $w = a b^3 a$.

5. $L_5 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \leq |w|_b \leq 2|w|_a\}$, $w = a b^3 a$.

6. $L_6 = \{w \in \{a, b\}^* \mid 3|w|_a \leq 5|w|_b \leq 4|w|_a\}$, $w = a^2 b^3 a^2$.