Université Sultan Moulay Slimane
Ecole National des Sciences Appliquées
Khouribga

Théorie de la calculabilité et de la complexité

4ème Année Génie informatique
Semestre 4 / Année 2018/2019
Feuille de TD N° 1
Comme devoir à la maison

Exercice 1

Soit l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Donner en extension les langages suivants sur Σ :

1. $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid |w| = 3\}$.
2. $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid |w| = 4 \text{ et } |w|_a = |w|_b\}$. La notation $|w|_a$ signifie le nombre d'occurrence du symbole a dans le mot w.
3. $L_3 = \{w \in \Sigma^* \mid |w| = 5 \text{ et } w^R = w\}$.

Exercice 2

Soient Σ un alphabet arbitraire et w un mot sur Σ.

- Un **facteur** de w est un mot y qui apparaît dans w, c'est-à-dire qu'il existe deux mots x et z tel que $w = xyz$.
- Un **préfixe** (ou **facteur gauche**) de w est un mot x qui débute w, c'est-à-dire qu'il existe un mot y tel que $w = xy$.
- Un **suffixe** (ou **facteur droit**) de w est un mot y qui termine w, c'est-à-dire qu'il existe un mot x tel que $w = xy$.
- Un **sous-mot** de w est un mot obtenu à partir de w en effaçant certains symboles de w.

1. Vérifier que ε est facteur, préfixe, suffixe et sous-mot de tout mot w.
2. Vérifier que tout mot w est facteur, préfixe, suffixe et sous-mot de lui-même.

On appelle **facteur propre** (respectivement **préfixe propre**, **suffixe propre**, **sous-mot propre**) d'un mot w, tout facteur (respectivement préfixe, suffixe, sous-mot) de w qui est différent de ε *et* w.

Soit $w = abcbaccba$ sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$.

3. Calculer $|w|$, $|w|_a$, $|w|_b$ et $|w|_{cba}$.
4. Déterminer w^0, w^1, w^2 et w^R. Le mot w est-t-il un palindrome ?
5. Déterminer tous les facteurs, préfixes et suffixes propres de w.
6. Déterminer tous les sous-mots propres de w de longueur ≤ 4.

Exercice 3

Soient K, L et M des langages définis sur un même alphabet Σ. Prouver les propriétés suivantes :

1. $K \subseteq L \Rightarrow MK \subseteq ML$. La réciproque est-elle vraie ?
2. $K \subseteq L \Rightarrow KM \subseteq LM$. La réciproque est-elle vraie ?
3. $K \subseteq L \Rightarrow K^* \subseteq L^*$.
4. $(L^*)^* = L^*$.
5. $K^* \cup L^* \subseteq (K \cup L)^*$. La réciproque est-elle vraie ?
6. $L^+ = LL^* = L^*L$.
7. $L^+ = L^* \Leftrightarrow \varepsilon \in L$. Sous quelle condition a-t-on $L^+ = L \setminus \{\varepsilon\}$?
8. $L \subseteq L^2 \Leftrightarrow \varepsilon \in L$.

Exercice 4

1. Donner une définition récursive de l'image (ou le renversé) d'un mot w défini sur un alphabet arbitraire Σ.
2. En utilisant cette définition récursive, démontrer les propriétés suivantes :
   a. $\forall x, y \in \Sigma^* : (xy)^R = y^R x^R$.
   b. $\forall w \in \Sigma^* : (w^R)^R = w$.
   c. $\forall w \in \Sigma^*$: si x est un sous-mot de w, alors x^R est un sous-mot de w^R.
   d. $\forall w \in \Sigma^*, \forall n \in \mathrm{IN} : (w^n)^R = (w^R)^n$.