Chapitre 4 :
Les arbres

Université Mohamed 1er
Faculté des sciences
Oujda

Sommaire

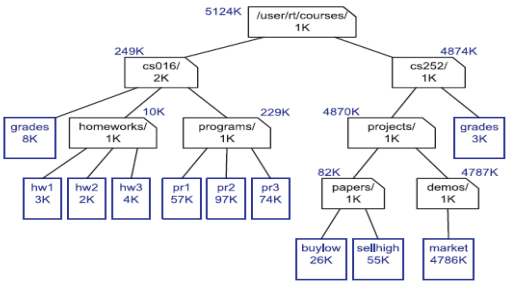
- Notion d'arbre
- Vocabulaire de base
- Arbres binaires
- Implémentation des arbres binaires
- Parcours des arbres binaires

Notion d'arbre

Notion d'arbre

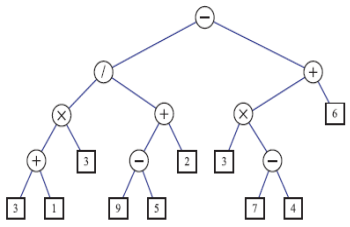
- Un **arbre** est un ensemble d'éléments, appelés **nœuds** (***nodes***) ou **sommets** (***vertex***), organisés d'une manière hiérarchique à partir d'un nœud très particulier, appelé **racine** (***root***) de l'arbre.
- La **structure d'arbre** est **fondamentale en informatique** :
  - Les **fichiers** dans **OS** sont organisés sous forme d'arbre.
  - Un **compilateur** représente un **programme source** sous forme d'un arbre : **l'arbre de syntaxe** (***sytnax tree***).

Notion d'arbre



Un arbre représentant un système de fichier.

Notion d'arbre



Une expression mathématique représentée sous d'un arbre par un compilateur.

Notion d'arbre

- La **structure d'arbre** est utilisée dans de très **nombreuses applications informatiques** :
  - **Arbres généalogiques**;
  - Arbres pour représenter des compétitions sportives (**tournois**);
  - Arbres pour les **organigrammes d'entreprises**;
  - Informations **hiérarchiques** (Table des matières d'un livre);
  - Fichiers **HTML**, **XML**.
  - **DOM** (JavaSript), …etc.

Vocabulaire de base

Vocabulaire de base

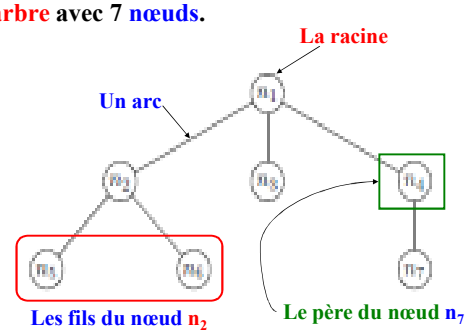
- **Définition itérative d'un arbre** :
  - Un **arbre** (***tree***) est un ensemble de **nœuds** reliés entre eux par des **arcs** (***edges***) et possédant les **trois propriétés** suivantes :
    - ✓ Il existe un **nœud particulier unique** appelé **racine**.
    - ✓ Tout nœud ***n*** autre que la racine est relié par un **arc** à un autre nœud ***m*** (unique), appelé le **père** (**parent**/***father***) de ***n***.
    - ✓ Tout nœud autre que la racine est relié à la racine par une **série d'arcs** (en traversant les pères successifs) : un arbre est qualifié de **connexe**.

Vocabulaire de base

- Si p est le **père** du nœud q, alors on dit aussi que q est un **fils** (***child***) de p.
- Un **nœud père** peut avoir **0**, **1** **ou** **plusieurs** **fils**.
- Cependant, tout nœud (sauf la racine) a **exactement un père**.
- La **série des pères** partant d'un nœud vers la racine est toujours **unique**.
- En informatique, les arbres sont souvent dessinés avec la **racine en haut** et avec les **pères au-dessus de leurs fils**.

Vocabulaire de base

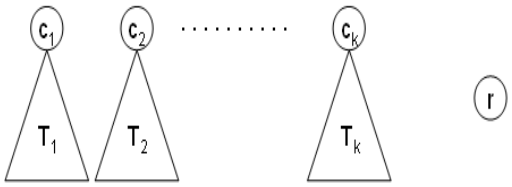
Un arbre avec 7 nœuds.



Vocabulaire de base

- **Définition récursive d'un arbre** :
  - Un **arbre** est un ensemble de **nœuds** construits récursivement de la manière suivante :
    - ✓ **LA BASE** : un **nœud seul** n est un **arbre** dont la racine est ce nœud n lui-même.
    - ✓ **LA RECURRENCE** : soit r un **nouveau nœud** et soient T_1, T_2, …, T_k des **arbres** ($k \geq 1$) ayant respectivement pour racines c_1, c_2, …, c_k. On suppose qu'aucun nœud n'apparaisse plus d'une fois dans les T_i. Comme r est un nouveau nœud, il ne peut donc pas apparaître dans un de ces arbres.

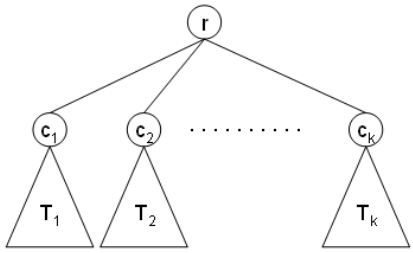
Vocabulaire de base



Vocabulaire de base

- **Définition récursive d'un arbre** :
  - On forme un **nouvel arbre** T à partir de r et de $T_1, T_2, \ldots, T_k$ comme suit :
    - ✓ Faire de r la **racine** de l'arbre T;
    - ✓ **Ajouter un arc** entre r et chacun des racines $c_1, c_2, \ldots, c_k$, de manière que chacun de ces nœuds soit un fils de la racine r.

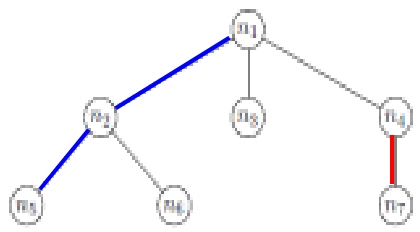
Vocabulaire de base



Vocabulaire de base

- **Chemins** :
  - Soient Ω un **arbre** et $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ une **séquence de nœuds** de Ω.
  - On dit que $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ est un **chemin** (***path***) depuis n_1 jusqu'à n_k dans l'arbre Ω, si n_i est le **père** de n_{i+1}, pour i =1, 2, …, k - 1.
  - La **longueur d'un chemin** $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ est le **nombre d'arcs** dans ce chemin (c'est aussi le nombre de nœuds dans le chemin auquel on retranche 1).
  - Par convention, un **nœud singulier** (n) est un **chemin de longueur 0**.

Vocabulaire de base



(n_1, n_2, n_5) est un chemin de longueur 2.

(n_4, n_7) est un chemin de longueur 1.

Vocabulaire de base

- **Unicité des chemins dans un arbre** :
  - **Proposition** :
    - ✓ Dans un **arbre** Ω, il **ne peut y avoir qu'un seul chemin** entre un **nœud** n et un autre **nœud** m.

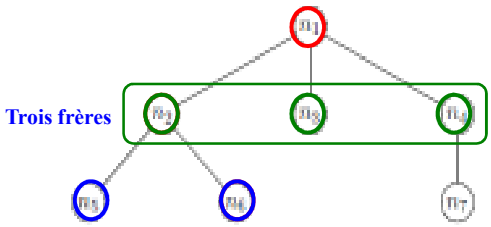
Vocabulaire de base

- **Ancêtres et descendants :**
  - Soit $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ un chemin dans un arbre Ω.
  - n_1 est appelé un **ancêtre** (***ancestore***) de n_k.
  - n_k est appelé un **descendant** de n_1.
  - Si $n_1 \neq n_k$, on dit que
    - ✓ n_1 est un **ancêtre propre** de n_k,
    - ✓ n_k est un **descendant propre** de n_1.

Vocabulaire de base

- **Ancêtres, Descendants et Frères :**
  - Les **ancêtres d'un nœud** sont formé par **le nœud lui-même**, de **son père**, puis **le père de son père** et ainsi de suite **jusqu'à la racine**.
  - Les **descendants d'un nœud** sont formés par ce **nœud lui-même**, de **ses fils**, puis **les fils de ses fils** et **ainsi de suite**.
  - Les **nœuds ayant le même père** sont appelés des **frères** (***siblings***).

Vocabulaire de base



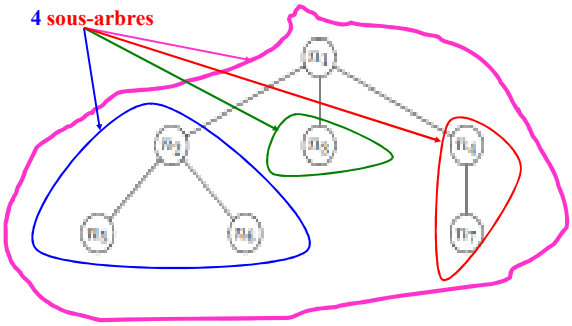
Ancêtres de n_6 : n_6, n_2 et n_1

Descendants propres de n_2 : n_5 et n_6

Vocabulaire de base

- **Sous-arbres :**
  - Dans un arbre Ω, un **nœud *n*** **accompagné de tous ses descendants propres** (s'il en possède) est appelé un **sous-arbre** (***subtree***) de Ω de racine n.

Vocabulaire de base

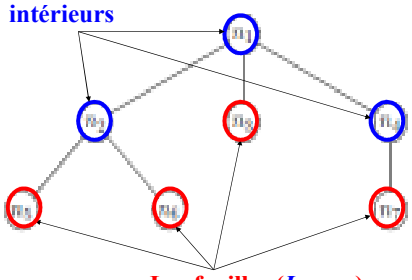


Vocabulaire de base

- **Feuilles, Nœuds intérieurs :**
  - Une **feuille** (***leaf***) est un **nœud** d'un arbre qui **n'a pas de fils**.
  - Un **nœud intérieur** (***interior node***) est un **nœud** qui **au moins un fils**.
  - **Remarque** :
    - ✓ Dans un arbre Ω, tout nœud est :
      - soit une feuille;
      - soit un nœud intérieur.
    - ✓ mais pas les deux.

Vocabulaire de base

Les nœuds intérieurs



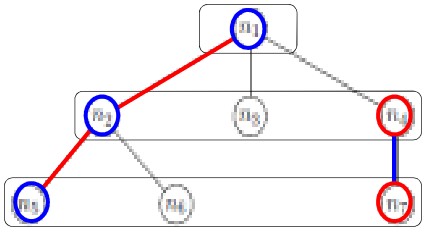
Les feuilles (*Leaves*)

Vocabulaire de base

- **Hauteurs d'un noeud, Hauteur d'un arbre :**
  - Dans un **arbre** Ω, la **hauteur d'un nœud** (***height***) ***n*** est la **longueur du plus long chemin depuis *n* jusqu'à une feuille**.
  - La **hauteur d'un arbre** est celle de sa **racine**.
- **Profondeur d'un nœud :**
  - Dans un **arbre** Ω, la **profondeur** (***depth***) ou le **niveau** (***level***) **d'un nœud** ***n*** est la **longueur du chemin depuis la racine jusqu'à *n***.
  - La **profondeur d'un arbre** est la **valeur maximale des profondeurs** de ses nœuds.

Vocabulaire de base

Hauteurs ou Niveaux :



Niveau 0

Niveau 1

Niveau 2

La profondeur de n_5 = 2 La hauteur de n_4 = 1

Vocabulaire de base

- **Profondeur d'un nœud ou d'un arbre :**
  - Soit x un nœud d'un **arbre** Ω (on écrit x ∈ Ω).
  - Alors la **profondeur** (***level/depth***) de x se calcule **récursivement par la formule suivante** :
    - ✓ ***depth***(x) = 0, si x = ***root***(Ω).
    - ✓ ***depth***(x) = 1 + ***depth***(***father***(x)), sinon.
  - La **profondeur** de l'arbre Ω est :
    - ✓ ***depth***(Ω) = **Max** {***depth***(x) | x ∈ Ω}

Vocabulaire de base

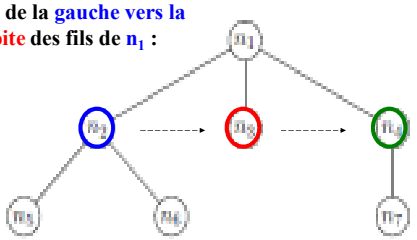
- **Hauteurs d'un noeud, Hauteur d'un arbre :**
  - La **hauteur** (***height***) de x se calcule **récursivement par la formule suivante** :
    - ✓ ***height***(x) = 0, si x ∈ ***Leaves***(Ω) (c'est-à-dire, si x est une feuille de Ω)
    - ✓ ***height***(x) = 1 + **Max** {***height***(y) | y ∈ ***Childs***(x)}, sinon.
  - La **hauteur** de l'arbre Ω est :
    - ✓ ***height***(Ω) = ***height***(***root***(Ω)) = ***depth***(Ω)

Vocabulaire de base

- **Arbres ordonnés et ordre gauche->droite :**
  - Un **arbre** Ω est dit **ordonné** (***ordered tree***) s'il existe une **relation d'ordre** sur les **nœuds de cet arbre** (une relation binaire réflexive, transitive et antisymétrique).
  - On peut affecter un **ordre de la gauche vers la droite** aux fils d'un nœud.

Vocabulaire de base

Ordre de la gauche vers la droite des fils de n_1 :



Vocabulaire de base

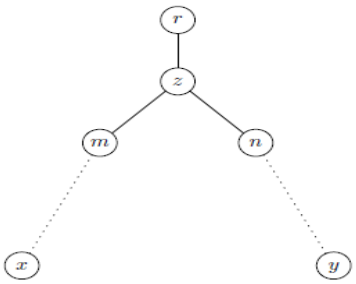
- **Arbres ordonnés et ordre gauche->droite :**
  - Cet **ordre de la gauche vers la droite** peut être étendue de manière à ordonner tous les nœuds d'un arbre :
    - ✓ Si m et n sont des **frères** et **si m est à la gauche de n**, alors **tous les descendants de m** sont **à la gauche de tous les descendants de n**.

Vocabulaire de base

- **Arbres ordonnés et ordre gauche->droite :**
  - **Propriété** :
    - ✓ Soient x et y deux **nœuds** d'un même arbre Ω tels **qu'aucun ne soit l'ancêtre de l'autre**. Alors, **l'un des deux nœuds sera à la gauche de l'autre**.

Vocabulaire de base

- **Arbres ordonnés et ordre gauche->droite**



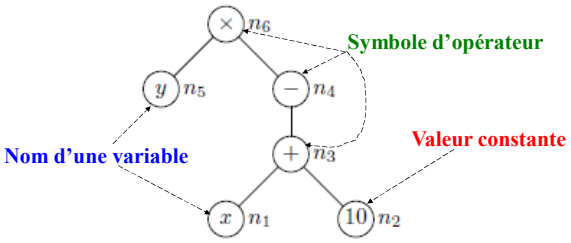
Vocabulaire de base

- **Arbres étiquetés :**
  - un **arbre étiqueté** est un arbre dans lequel **chaque nœud** possède une **étiquette** (***label***) ou une **valeur**.
  - L'étiquette d'un nœud représente généralement une **information associée au nœud** considéré.
  - Elle peut être :
    - ✓ soit **simple** (un entier);
    - ✓ soit **complexe** (le texte d'un document).

Vocabulaire de base

- **Arbres étiquetés :**
  - L'étiquette d'un nœud est **modifiable**, alors que son **nom** ne l'est pas.
  - Il est possible que plusieurs nœuds aient la **même étiquette**, mais le **nom** de chaque nœud **doit être unique**.

Vocabulaire de base



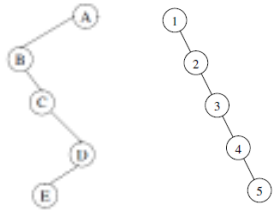
Un arbre étiqueté

Vocabulaire de base

- **Arbre vide, Arbre-feuille, Arbre dégénéré :**
  - Un **arbre** Ω est **vide**, s'il **n'admet aucun nœud**. On le note par : ∅.
  - Un **arbre-feuille** est un **arbre réduit à sa racine** r. On le note par Ω = (r).
  - Un **arbre** est **dégénéré**, (ou **filiforme**) si **tous ses nœuds ont au plus un descendant**.
    - ✓ Un tel arbre possède un **seul chemin simple**.
    - ✓ On le note donc par $\Omega = (n_1, n_2, \ldots, n_k)$.

Vocabulaire de base

Un **arbre-feuille**

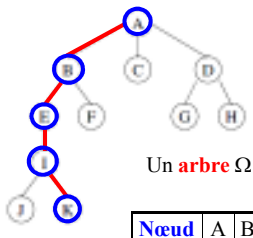


Deux **arbres dégénérés (filiformes)**

Vocabulaire de base

- **Taille d'un arbre, Degré d'un nœud, Branche d'un arbre :**
  - La **taille d'un arbre** Ω est égale au **nombre de ses nœuds**.
  - Le **degré d'un nœud** n dans un **arbre** Ω est égal au **nombre de ses fils** (**successeurs**).
  - Une **branche d'un arbre** Ω est un **chemin** qui relie la **racine** à une **feuille** de Ω.
    - ✓ C'est donc un chemin $C = (n_1, n_2, \ldots, n_k)$ tel que $n_1 = \textit{root}(\Omega)$ et $n_k \in \textit{Leaves}(\Omega)$.

Vocabulaire de base



Un **arbre** Ω

Taille(Ω) = **11**

Une **branche** de Ω : (**A**, **B**, **E**, **I**, **K**)

Nœud	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
Degré	3	2	0	2	1	0	0	0	2	0	0

Le **degré** de Ω : **3**

Vocabulaire de base

- **Propriété :**
  - Un **arbre** a **autant de branches que de feuilles**.

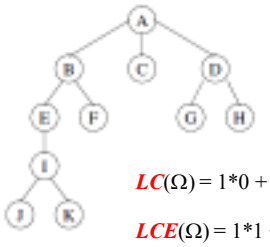
Vocabulaire de base

- **Longueur de cheminement d'un arbre :**
  - La **longueur de cheminement** d'un **arbre** Ω est égale à la **somme des profondeurs** de tous les **nœuds** :
    - ✓ $LC(\Omega) = \sum depth(x), x \in \Omega$.
  - La **longueur de cheminement externe** d'un **arbre** Ω est égale à la **somme des profondeurs** de ses **feuilles** :
    - ✓ $LCE(\Omega) = \sum depth(x), x \in Leaves(\Omega)$.

Vocabulaire de base

- **Longueur de cheminement d'un arbre :**
  - La **longueur de cheminement interne** d'un **arbre** Ω est égale à la **somme des profondeurs** de ses **nœuds intérieurs** :
    - ✓ $LCI(\Omega) = \sum depth(x), x \in Internals(\Omega)$.
  - On a évidemment la relation :
    - ✓ $LC(\Omega) = LCE(\Omega) + LCI(\Omega)$

Vocabulaire de base



$LC(\Omega) = 1*0 + 3*1 + 4*2 + 1*3 + 2*4 = 22$

$LCE(\Omega) = 1*1 + 3*2 + 2*4 = 15$

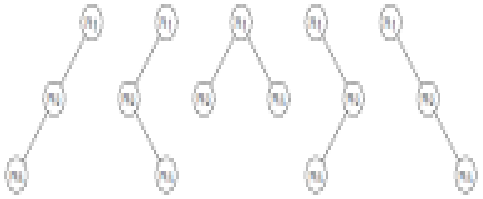
$LCI(\Omega) = 1*0 + 2*1 + 1*2 + 1*3 = 7$

Arbres binaires

Arbres binaires

- **Définition** :
  - Un **arbre binaire** (***binary tree***) est un arbre dans lequel **chaque nœud** peut avoir **au plus deux fils** :
    - ✓ un **fils gauche** (***left child***),
    - ✓ et/ou un **fils droit** (***right child***).
- **Remarque** :
  - Le **vocabulaire** pour les **arbres généraux** s'applique aussi aux **arbres binaires**.

Arbres binaires

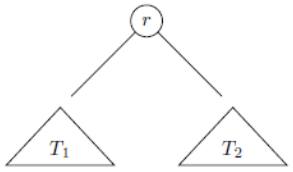


Les 5 arbres binaires avec 3 nœuds.

Arbres binaires

- **Définition (récursive)** :
  - un **arbre binaire** est un arbre défini récursivement comme suit :
    - ✓ **La base** : l'**arbre vide** est un **arbre binaire**.
    - ✓ **La récurrence** : si r un **nouveau nœud** et si T_1 et T_2 sont **deux arbres binaires**, alors on peut créer un **nouvel arbre binaire** tel que :
      - r est la **racine**;
      - T_1 est le **sous-arbre gauche**;
      - T_2 et le **sous-arbre droit**.

Arbres binaires

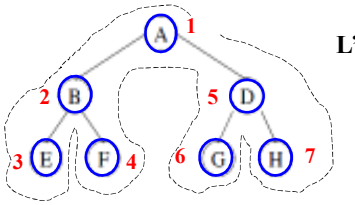


Définition récursive d'un arbre binaire

Arbres binaires

- **Ordres classiques dans un arbre binaire** :
  - Soit $\Omega = (r, \Omega_g, \Omega_d)$ un **arbre binaire** de racine r, de sous-arbre gauche Ω_g et de sous-arbre droit Ω_d.
  - On peut définir **trois ordres classiques** sur Ω :
    - ✓ L'ordre **préfixe (ou pré-ordre)** : r, puis Ω_g, puis Ω_d.
    - ✓ L'ordre **infixe (ou symétrique) :** Ω_g, puis r, puis Ω_d.
    - ✓ L'ordre **postfixe (ou suffixe)** : Ω_g, puis Ω_d, puis r.

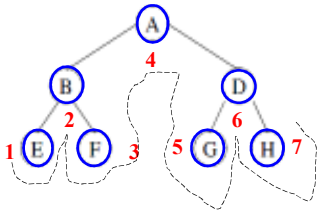
Arbres binaires



L'ordre préfixe

L'ordre préfixe donne : A, B, E, F, D, G, H

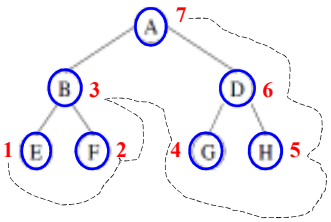
Arbres binaires



L'ordre infixe

L'ordre infixe donne : E, B, F, A, G, D, H

Arbres binaires



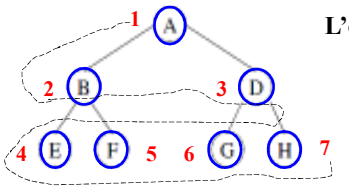
L'ordre postfixe

L'ordre postfixe donne : E, F, B, G, H, D, A

Arbres binaires

- **Parcours hiérarchique (ou en largeur)** :
  - Les **trois ordres classiques** (**préfixe**, **infixe**, **postfixe**) définissent ce qu'on appelle le **parcours en profondeur**.
  - Un autre parcours important d'arbres est appelé **parcours en largeur** (**parcours hiérarchique** ou **parcours par niveaux**).
  - Il consiste à parcourir un arbre **niveau par niveau**, en **partant de la racine**, et **en suivant un ordre de gauche à la droite** pour **chaque niveau**.

Arbres binaires

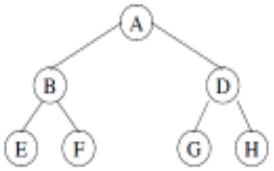


L'ordre hiérarchique

L'ordre hiérarchique donne : A, B, D, E, F, G, H

Arbres binaires

- **Arbre binaire complet** :
  - Un **arbre binaire complet** (***full binary tree***) est un **arbre binaire** dont tous les **nœuds intérieurs sont de degré 2**.



Un arbre binaire complet de profondeur 2

Arbres binaires

- **Propriété** :
  - Un **arbre binaire complet** (**non vide**) ayant n **nœuds intérieurs possède** (n + 1) **feuilles**.
- **Preuve :**
  - Par **récurrence sur le nombre des nœuds intérieurs** ***n*** de l'arbre Ω.
  - On pose :
    - ✓ $n_f(\Omega)$ = le nombre de feuilles de Ω.
    - ✓ $n_i(\Omega)$ = le nombre de nœuds intérieurs de Ω.

Arbres binaires

- **Preuve (suite) :**
  - **La base** :
    - ✓ Si $n_i(\Omega) = 0$, alors Ω est réduit à sa racine qui est sa seule feuille ($n_f(\Omega) = 1$).
  - **La récurrence** :
    - ✓ (**HR**) : soit $n > 0$ et supposant que pour tout arbre binaire complet Ω tel que : $0 \leq n_i(\Omega) < n$, alors $n_f(\Omega) = 1 + n_i(\Omega)$.
    - ✓ Montrons la relation pour n : soit alors un arbre binaire complet Ω tel que $n_i(\Omega) = n$.

Arbres binaires

- **Preuve (suite) :**
  - ✓ Comme $n > 0$, l'arbre binaire complet Ω est composé d'une racine r et de deux sous-arbres (complets) Ω_1 et Ω_2.
  - ✓ Posons : $n_1 = n_i(\Omega_1)$ et $n_2 = n_i(\Omega_2)$.
  - ✓ Il est clair que : $n = n_1 + n_2 + 1$.
  - ✓ De plus, on a : $0 \leq n_1 < n$ et $0 \leq n_2 < n$.
  - ✓ Par (**HR**) : $n_f(\Omega_1) = 1 + n_1$ et $n_f(\Omega_2) = 1 + n_2$. Or, $n_f(\Omega) = n_f(\Omega_1) + n_f(\Omega_2) = (1 + n_1) + (1 + n_2) = (n_1 + n_2 + 1) + 1 = n + 1$.

Implémentation des arbres binaires

Implémentation des arbres binaires

- **Implémentation contiguë (première solution)** :
  - On utilise un **tableau d'enregistrements** composés de trois champs:
    - ✓ « ***info*** » : stocke la **valeur** du nœud.
    - ✓ « ***left*** » : stocke **l'indice du fils gauche** du nœud.
    - ✓ « ***right*** » : stocke **l'indice du fils droit** du nœud.
  - Une **variable** est utilisée pour **mémoriser l'indice de la racine de l'arbre**.

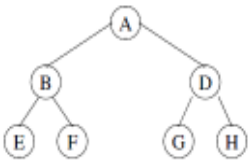
Implémentation des arbres binaires

- **Codage en C** :

```
#define  MAX_SIZE  100
typedef struct Node  {
  int info, left, right;
} Node;

typedef struct tree {
  Node nodes[MAX_SIZE];
  int root;
} tree;
```


Implémentation des arbres binaires



root

0

nodes

	info	*left*	*right*
0	A	1	2
1	B	3	4
2	D	5	6
3	E	-1	-1
4	F	-1	-1
5	G	-1	-1
6	H	-1	-1

-1 indique la représentation de la valeur NULL (absence d'un fils)

Implémentation des arbres binaires

- **Implémentation contiguë (deuxième solution)** :
  - Il suffit de **ranger les nœuds** dans **l'ordre préfixé** et **d'associer à chaque nœud**, les **indicateurs** suivants :
    - ✓ « ***info*** » : stocke la **valeur** du nœud.
    - ✓ « ***left*** » : un **booléen** qui indique la présence d'un **sous-arbre gauche** (non vide).
    - ✓ « ***right*** » : un **booléen** qui indique la présence d'un **sous-arbre droit**.

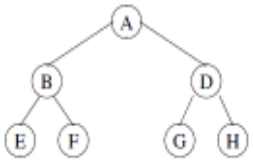
Implémentation des arbres binaires

- **Codage en C** :

```
#define  MAX_SIZE  100
typedef struct Node  {
  int info;
  enum {False, True} left, right;
} Node;
typedef struct tree {
  Node nodes[MAX_SIZE];
  int root;
} tree;
```

Implémentation des arbres binaires

L'ordre **préfixe** donne :
A, B, E, F, D, G, H



root

0

nodes

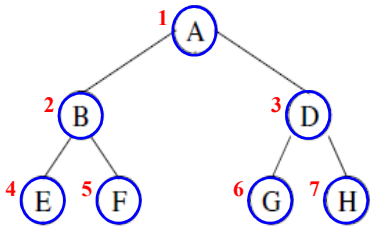
	info	*left*	*right*
0	A	1	1
1	B	1	1
2	E	0	0
3	F	0	0
4	D	1	1
5	G	0	0
6	H	0	0

-1 indique la représentation de la valeur NULL (absence d'un fils)

Implémentation des arbres binaires

- **Implémentation contiguë pour un arbre binaire complet** :
  - On **numérote les nœuds** de **l'arbre** en effectuant un « **parcours en largeur** », **en commençant par 1**.
  - Puis, il suffit de considérer que ce **numéro** est l'indice du **i^{ème} nœud** selon cet ordre de parcours.

Implémentation des arbres binaires



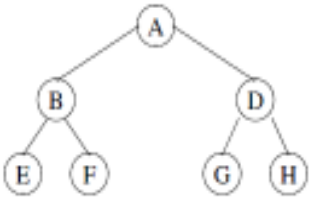
Implémentation des arbres binaires

- **Implémentation contiguë pour un arbre binaire complet** :
  - On constante que les numéros obéissent aux règles suivantes :
    - ✓ Le **numéro de la racine** est **1**.
    - ✓ Le **numéro du fils gauche** = le **double de celui de son père**.
    - ✓ Le **numéro du fils droit** = le **double de celui de son père**, **plus 1**.

Implémentation des arbres binaires

- **Implémentation contiguë pour un arbre binaire complet** :
  - On utilisera tout simplement un tableau V tel que :
    - ✓ V[1] : stocke **l'information associée** à la **racine**.
    - ✓ V[2*i] : stocke **l'information associée** au **fils gauche** du **nœud** i.
    - ✓ V[2*i+1] : stocke **l'information associée** au **fils droit** du **nœud** i.

Implémentation des arbres binaires



	A	B	D	E	F	G	H
0	1	2	3	4	5	6	7

Implémentation des arbres binaires

- **Implémentation contiguë pour un arbre binaire complet** :
  - Si i ≠ 1, V[i / 2] : stocke **l'information associée** au père du **nœud** i.

Implémentation des arbres binaires

- **Implémentation chaînée d'un arbre binaire** :
  - Les **nœuds** sont représentés par des **enregistrements avec trois champs** qui sont :
    - ✓ « ***info*** » : d'un **certain type** (stocke la valeur du nœud).
    - ✓ « ***left*** » : un **pointeur vers le fils gauche** du nœud.
    - ✓ « ***right*** » : un **pointeur vers le fils droit** du nœud.
  - La valeur **NULL** reflète **l'absence du fils**.

Implémentation des arbres binaires

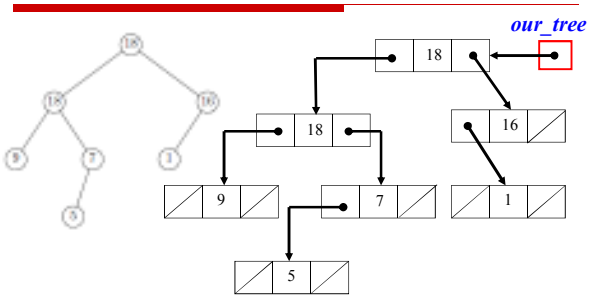
- **Implémentation chaînée d'un arbre binaire** :
  - **L'arbre binaire** lui-même est déterminé par **l'adresse de sa racine**, c'est-à-dire qu'il est représenté par un pointeur vers sa racine.
  - **L'arbre binaire vide** est naturellement représenté par **NULL**.

Implémentation des arbres binaires

- **Code C de la représentation chaînée d'un arbre binaire** :

```
typedef struct Node* tree;
typedef struct Node
{
  tree left;    /* le fils gauche */
  int info;
  tree right;  /* le fils droit */
} Node;
```


Implémentation des arbres binaires



Parcours des arbres binaires

Parcours des arbres binaires

- **Parcours d'un arbre binaire** :
  - Plusieurs opérations sur les arbres binaires nécessitent le **parcours de l'arbre** tout entier.
  - Par exemple, **l'affichage d'un arbre binaire** nécessite de parcourir tous les nœuds de l'arbre.
  - En partant d'un **nœud N**, nous pouvons effectuer l'une des actions suivantes :

Parcours des arbres binaires

- **Parcours d'un arbre binaire** :
  - ✓ **Visiter** le **nœud** (**N**);
  - ✓ **Traverser récursivement** le **sous-arbre gauche** (***G***);
  - ✓ **Traverser récursivement** le **sous-arbre droit** (***D***);

Parcours des arbres binaires

- **Parcours d'un arbre binaire** :
  - ✓ Si nous adoptons cette stratégie, nous aurons trois types de parcours :
  - ✓ *Le **parcours NGD** ou **préfixe** (**preorder**)*
  - ✓ *Le **parcours GND** ou **infixe** (**inorder**)*
  - ✓ *Le **parcours GDN** ou **postfixe** (**postorder**)*

Parcours des arbres binaires

- **Parcours préfixe** :

```
void doPrefixe(tree currentNode)
{
  if(currentNode != NULL)
  {
    /* do some things with currentNode */
    doPrefixe(currentNode->left);
    doPrefixe(currentNode->right);
  }
}
```


Parcours des arbres binaires

- **Parcours infixe** :

```
void doInfixe(tree currentNode)
{
  if(currentNode != NULL)
  {
    doInfixe(currentNode->left);
    /* do some things with currentNode */
    doInfixe(currentNode->right);
  }
}
```


Parcours des arbres binaires

- **Parcours postfixe** :

```
void doPostfixe(tree currentNode)
{
  if(currentNode != NULL)
  {
    doPostfixe(currentNode->left);
    doPostfixe(currentNode->right);
    /* do some things with currentNode */
  }
}
```

Parcours des arbres binaires

- **Parcours d'un arbre binaire** :
  - ✓ Pour effectuer un **parcours total de l'arbre**, ces trois fonctions **doivent être appelées** en leur **passant la racine de l'arbre** comme **argument effectif** :
    - *tree root;*
    - *doPrefixe(root);*
    - *doInfixe(root);*
    - *doPostfixe(root);*

Parcours des arbres binaires

- **Complexité du parcours d'un arbre binaire** :
  - ✓ Soit un **arbre binaire** ayant ***n*** **nœuds**.
  - ✓ La **complexité** sera comptée **en nombre de traitements de nœuds**.
  - ✓ **Propriété** :
    - La complexité de chacun des trois **parcours en profondeur d'arbres binaires** est **linéaire** (en $\Theta(n)$).

Parcours des arbres binaires

- **Exemple 1 : calculer la taille d'un arbre binaire**

```
int getSize( tree root)
{
  if(root == NULL)
    return 0;
  else
    return
      1 + getSize(root->left) + getSize(root->right);
}
```


Parcours des arbres binaires

- **Exemple 2 : calculer la profondeur d'un arbre binaire**

```
int getHeight( tree root)   {
  if(root == NULL)
    return -1;
  else {
        int lh = getHeight(root->left);
        int rh = getHeight(root->right);
        return 1 + (lh > rh ? lh : rh);  }
}
```